ESERCIZI

1. PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE

Teoria a pagina G148

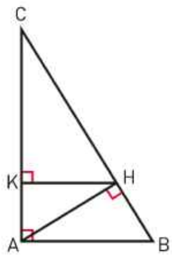
1 VERO O FALSO? Considerando la figura, puoi affermare che:

a. $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH}$. V F

b. $\overline{AC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{BH}$. V F

c. $\overline{AH}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AK}$. V F

d. $\overline{CH}^2 = \overline{HK} \cdot \overline{CK}$. V F



2 COMPLETA osservando la figura.

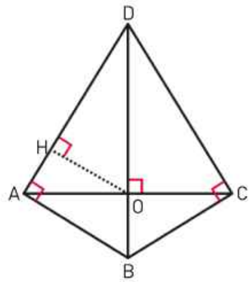
a. $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \square$

b. $\overline{BC}^2 = \overline{OB} \cdot \square$

c. $\overline{AH} \cdot \overline{AD} = \square^2$

d. $\overline{BD} \cdot \square = \overline{CD}^2$

e. $\overline{AB}^2 = \overline{DB} \cdot \square$

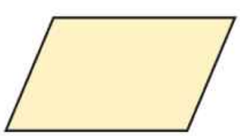


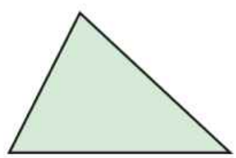
Costruzioni

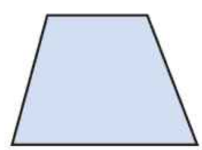
3 YOU & MATHS **Equivalent quadrilaterals** Draw a square *ABCD*. Using the properties of right triangles, draw a rectangle that has the same area as *ABCD*.

4 Disegna un rettangolo *PQRS* e costruisci un quadrato a esso equivalente utilizzando il primo teorema di Euclide.

5 Per ognuna delle seguenti figure costruisci prima un rettangolo equivalente e poi, utilizzando il primo teorema di Euclide, un quadrato equivalente.


a


b


c

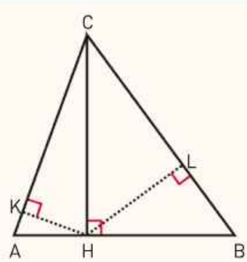
Dimostrazioni

ESEMPIO

Nel triangolo *ABC*, *CH* è l'altezza relativa al lato *AB* e *K*, *L* sono rispettivamente le proiezioni di *H* su *AC* e *BC*.
Dimostriamo che il rettangolo con i lati congruenti a *CK* e *AC* è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti a *BC* e *CL*.

Ipotesi: $CH \perp AB$
$HK \perp AC$
$HL \perp BC$

Tesi: $\overline{AC} \cdot \overline{CK} = \overline{BC} \cdot \overline{CL}$



DIMOSTRAZIONE

Nel triangolo rettangolo ACH, per il primo teorema di Euclide: $\overline{AC} \cdot \overline{CK} = \overline{CH}^2$.

Nel triangolo rettangolo CHB, per il primo teorema di Euclide: $\overline{BC} \cdot \overline{CL} = \overline{CH}^2$.

Per la proprietà transitiva: $\overline{AC} \cdot \overline{CK} = \overline{BC} \cdot \overline{CL}$.

6 Data una circonferenza di diametro AB, dimostra che il quadrato costruito su una corda AC è equivalente al rettangolo di base AB e altezza congruente alla proiezione di AC su AB. (*Suggerimento.* Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è un triangolo rettangolo.)

7 Nel trapezio $ABCD$, rettangolo in A e D, la diagonale AC è perpendicolare al lato BC. Dimostra che il quadrato costruito su AC è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti ad AB e DC.

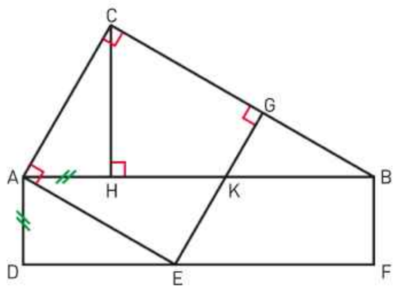
8 Da un punto C di una circonferenza di diametro AB traccia la tangente t che incontra in P il prolungamento di AB. Indica con D la proiezione di C su AB. Dimostra che il rettangolo di lati OP e OD è equivalente al quadrato che ha per lato il raggio. (*Suggerimento.* Una retta tangente a una circonferenza è perpendicolare al raggio che passa per il punto di tangenza.)

9 Data la semicirconferenza di diametro AB, traccia la tangente r in B e considera una corda AC il cui prolungamento interseca r in P. Dette H e K le proiezioni di C rispettivamente su AB e su r, dimostra che il rettangolo di lati KB e BP è equivalente al rettangolo di lati HB e AB.

10 Nel triangolo ABC, BH è l'altezza relativa al lato AC e gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ sono acuti. Dimostra che se il quadrato costruito su AB è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti ad AC e AH, allora $\widehat{B}$ è retto.

11 Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC. Dopo aver tracciato le altezze BH e CK, dimostra che il quadrato costruito su CK è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti a BC e alla semisomma di BC e KH.

12



Nella figura il triangolo ABC è rettangolo in C e $AD \cong AH$. Inoltre, EA è perpendicolare ad AC ed EG è perpendicolare a GC. Dimostra che:

a. $AEGC$ è un quadrato;

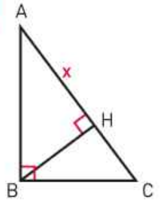
b. $AEGC$ è equivalente al rettangolo $ADFB$;

c. il trapezio $EFBK$ è equivalente al quadrilatero $HKGC$.

Con le misure

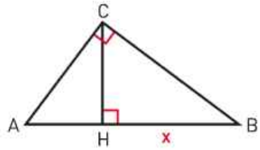
Nelle seguenti figure calcola il valore di x.

13



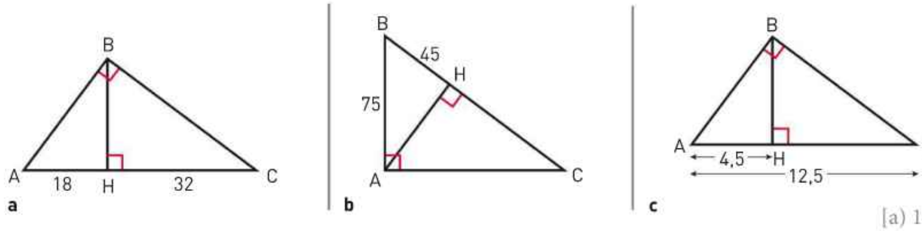
AC = 15 cm
AB = 12 cm
AH = x cm

14



AB = 5 cm
AC = 3 cm
BH = x cm

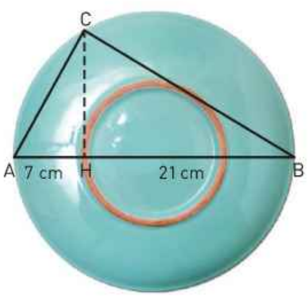
15 Utilizzando il primo teorema di Euclide e i dati forniti, determina il perimetro dei seguenti triangoli.



[a) 120; b) 300; c) 30]

16 In un triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa BC misura 12 cm e la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa è i $\frac{4}{9}$ dell'ipotenusa stessa. Quanto misura AB? [8 cm]

17 **In un mezzo piatto** Calcola perimetro e area del triangolo ABC in figura. $[(42 + 14\sqrt{3})$ cm; $98\sqrt{3}$ cm$^2]$

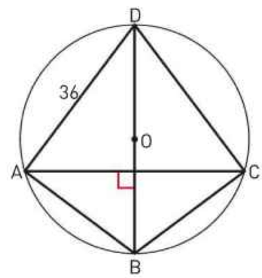


18 In una circonferenza di raggio 1 cm traccia un diametro AB e un segmento AC, di lunghezza 1 cm, tangente alla circonferenza. Detto P il punto in cui BC interseca la circonferenza, quanto vale $\overline{PB} \cdot \overline{BC}$? [4]

19 In un triangolo ABC, rettangolo in C, la lunghezza di AB è 30 cm e il quadrato costruito su BC ha area di 576 cm^2. Calcola la lunghezza della proiezione di BC su AB. [19,2 cm]

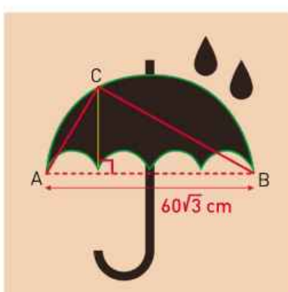
20 In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 2 cm e 6 cm. Calcola l'area del triangolo utilizzando il primo teorema di Euclide. $[8\sqrt{3}$ cm$^2]$

21 La circonferenza in figura ha il raggio di 22,5 cm e inoltre $AD = 36$ cm.
Determina il perimetro di $ABCD$. [126 cm]



22 Un trapezio isoscele $ABCD$ ha la base maggiore AB di 40 cm e il lato obliquo di 24 cm; la diagonale DB è perpendicolare al lato AD. Calcola il perimetro del trapezio. [99,2 cm]

23 Il profilo dell'ombrello è rappresentato da cinque semicirconferenze, di cui quattro congruenti. Trova il perimetro e l'area del triangolo ABC. $[90(1 + \sqrt{3})$ cm; $1350\sqrt{3}$ cm$^2]$

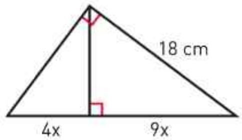


Problemi algebrici

24 ESEMPIO DIGITALE Calcola la lunghezza dei cateti di un triangolo rettangolo, sapendo che l'ipotenusa misura 85 cm e le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono una i $\frac{2}{3}$ dell'altra.

25 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa supera di 40 cm uno dei due cateti, che a sua volta supera di 24 cm la sua proiezione sull'ipotenusa. Calcola il perimetro del triangolo. [240 cm]

26 Calcola l'area del triangolo in figura.
[108 cm²]



27 In un triangolo rettangolo, la proiezione del cateto minore sull'ipotenusa è congruente ai $\frac{5}{13}$ del cateto stesso. Sapendo che il perimetro del triangolo misura 78 cm, determina la sua area.
[202,8 cm²]

28 Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo in cui la somma di un cateto e della sua proiezione sull'ipotenusa è di 28,8 cm e la loro differenza è di 7,2 cm.
[72 cm; 216 cm²]

29 In una semicirconferenza di diametro $AB = 75$ cm è inscritto un triangolo ABC avente un lato congruente ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sul diametro. Calcola il perimetro di ABC.
[180 cm]

2. TEOREMA DI PITAGORA

Teoria a pagina G149

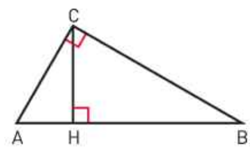
30 VERO O FALSO? Rispondi osservando la figura.

a. $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$ V F

b. $\overline{BH}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CH}^2$ V F

c. $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$ V F

d. $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2$ V F



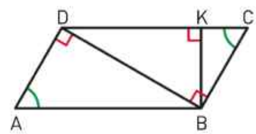
31 TEST Con riferimento alla figura, individua l'affermazione *errata*.

A $\overline{CK}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BK}^2$

B $\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$

C $\overline{BK}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{DK}^2$

D $\overline{BC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CD}^2$

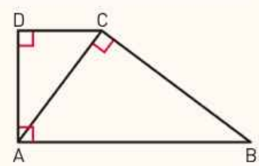


32 YOU & MATHS **A non-Pythagorean case** Draw a triangle ABC in which AB is the longest side and the sum of the areas of the squares built on AC and BC is less than the area of the square built on AB.

Dimostrazioni

ESEMPIO

Dimostriamo che, se in un trapezio rettangolo una diagonale è perpendicolare al lato obliquo, allora la differenza dei quadrati costruiti sulle basi è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati.



Ipotesi: $D\widehat{A}B$, $A\widehat{D}C$, $A\widehat{C}B$ angoli retti

Tesi: $\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema di Pitagora, nel triangolo ABC abbiamo: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$.

Per il teorema di Pitagora, nel triangolo ACD abbiamo: $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$.

Sottraendo membro a membro: $\boldsymbol{\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2} = (\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2) - (\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2) =$

$\overline{BC}^2 + \cancel{\overline{AC}^2} - \cancel{\overline{AC}^2} + \overline{AD}^2 = \boldsymbol{\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2}$.

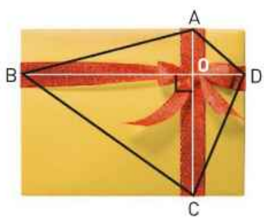
33 AL VOLO Dimostra che un quadrato è equivalente alla metà del quadrato costruito su una sua diagonale.

34 Nel triangolo acutangolo ABC, sia CK l'altezza relativa al lato AB. Dimostra che la somma dei quadrati costruiti su AC e BK è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BC e AK.

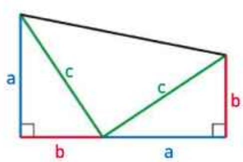
35 Dato il triangolo PQR, rettangolo in Q e detto S un punto sul prolungamento di QR, dalla parte di R, dimostra che la somma dei quadrati costruiti su PR e QS è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su PS e QR.

36 Dimostra che in un triangolo rettangolo la differenza dei quadrati costruiti sui cateti è uguale a quella tra i quadrati che hanno per lato le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

37 Dimostra che nel quadrilatero in figura $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$.



38 EUREKA! **Da presidente** Il disegno è una dimostrazione del teorema di Pitagora proposta nel 1876 da J.A. Garfield, che in seguito divenne presidente degli Stati Uniti.



a. Calcola l'area del trapezio direttamente e come somma di tre triangoli.

b. Deduci il teorema di Pitagora.

39 Il trapezio $ABCD$ è rettangolo in A e B. Detto P il punto di intersezione delle bisettrici di $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$, dimostra che il quadrato costruito su CD è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su PC e PD.

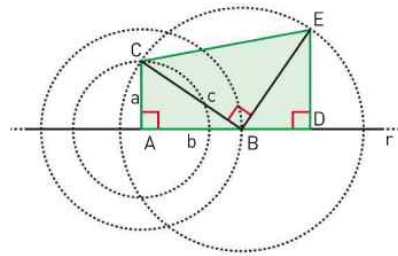
40 Dimostra che in un trapezio rettangolo, con la diagonale minore perpendicolare al lato obliquo, il quadrato della base maggiore è uguale alla somma dei quadrati degli altri tre lati.

41 Dimostra che in un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto a una semicirconferenza di diametro AB, il quadrato del lato obliquo CD è equivalente alla somma dei quadrati dei segmenti che congiungono il centro con i vertici C e D.

42 Nel triangolo ABC, rettangolo in B, considera su AB un punto E e su BC un punto D. Dimostra che $\overline{EC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{ED}^2$.

MATEMATICA AL COMPUTER

Geometria dinamica e teorema di Pitagora



Un altro modo di dimostrare il teorema di Pitagora…

- Problema e risoluzione.
- 4 esercizi in più.

Con le misure

43 ASSOCIA le lunghezze dei cateti con quella dell'ipotenusa corrispondente.

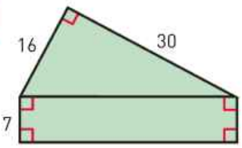
a. 6 cm, 8 cm	1. 20 cm
b. 8 cm, 15 cm	2. 17 cm
c. 10 cm, 24 cm	3. 10 cm
d. 12 cm, 16 cm	4. 26 cm

44 INVALSI 2003 Nella tabella sono riportate le lunghezze dei lati di 5 triangoli espresse in centimetri.
Elenca tutti i triangoli che sono rettangoli. Solo i triangoli…

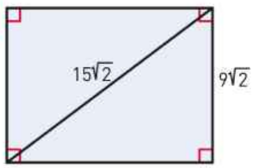
Triangolo	Lato	Lato	Lato
1	3	4	5
2	5	12	13
3	10	12	16
4	9	12	15
5	10	14	16

A 1 e 2.
B 1 e 4.
C 1, 2 e 4.
D 1, 4 e 5.
E 3, 4 e 5.

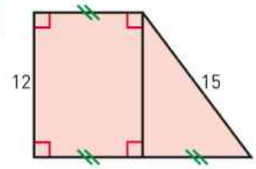
Nelle figure, le misure sono in centimetri. Determina il perimetro e l'area dei poligoni.

45


[94 cm; 478 cm^2]

46


[$42\sqrt{2}$ cm; 216 cm^2]

47


[54 cm; 162 cm^2]

48 Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 48 cm e l'area di 336 cm^2.
Quanto è lunga l'ipotenusa? [50 cm]

49 In un rombo la diagonale maggiore misura $48a$ e la diagonale minore è i $\frac{5}{12}$ della maggiore. Calcola il perimetro del rombo. [$104a$]

50 Il lato di un quadrato è congruente alla diagonale di un rettangolo i cui lati sono lunghi 12 cm e 5 cm. Calcola l'area e il perimetro del quadrato. [169 cm^2; 52 cm]

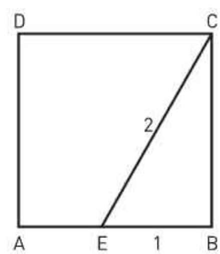
51 Calcola il perimetro di un rombo in cui le diagonali misurano 32 cm e 60 cm. [136 cm]

52 Determina la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo rettangolo con cateti lunghi 7 cm e 24 cm. [12,5 cm]

53 INVALSI 2011

Una scala, costituita da 5 gradini profondi 24 cm e alti 18 cm l'uno, deve essere coperta da una tavola di legno utilizzata come scivolo per il trasporto di alcune merci. Qual è il procedimento corretto per trovare la lunghezza dello scivolo?

A $(\sqrt{18^2}+\sqrt{24^2})\cdot 5$
B $\sqrt{(24+18)^2}\cdot 5$
C $\sqrt{24^2+18^2}\cdot 5$
D $\sqrt{(24^2+18^2)\cdot 5}$

54 INVALSI 2013


ABCD è un quadrato, il segmento *EC* è lungo 2 dm e il segmento *EB* è lungo 1 dm.
La superficie del quadrato *ABCD* misura:

A 5 dm^2.
B $4\sqrt{3}$ dm^2.
C 3 dm^2.
D 4 dm^2.

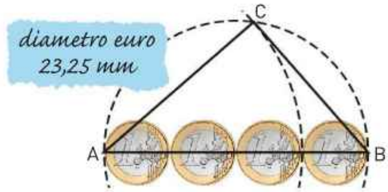
55 In una circonferenza di raggio 7,5 cm è inscritto un triangolo *ABC*, con *AB* coincidente con un diametro. Sapendo che $AC \cong \frac{3}{5}AB$, calcola perimetro e area di *ABC*. [36 cm; 54 cm^2]

56 TEST In un triangolo isoscele *ABC*, la base *AB* è congruente all'altezza *CH*. Quanto vale il rapporto tra l'area del triangolo e l'area del quadrato costruito sul lato obliquo?

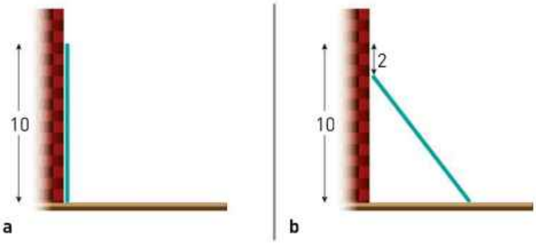
A $\frac{3}{4}$
B $\frac{2}{5}$
C $\frac{\sqrt{5}}{2}$
D $\frac{1}{2}$

57 **Quattro euro e un triangolo** Nella figura, i due archi di circonferenza hanno centro rispettivamente in A e nel punto medio di AB. Calcola perimetro e area di ABC.

[$\simeq 224{,}26$ mm; $\simeq 2145{,}16$ mm^2]



58 INVALSI 2008 In una tavoletta babilonese del 1800 a.C. si legge il seguente quesito:
«Un bastone lungo 10 unità è appoggiato ad un muro (figura *a*). Poi, scivola di 2 unità (figura *b*). Di quante unità il piede del bastone si è allontanato dalla base del muro?».



A 6 unità.

B 8 unità.

C 10 unità.

D 12 unità.

59 TEST **Pieve** Uno scout sta esplorando la campagna nei dintorni di una pieve. Alla partenza, si trova 200 m a sud del campanile. Dopo aver girovagato un po', si guarda intorno e nota che l'altezza apparente del campanile si è dimezzata: ne deduce che la sua distanza da esso è raddoppiata; inoltre, consultando la sua bussola scopre che il campanile si trova in direzione ovest. Di quanto si è spostato lo scout, in linea d'aria?

A 600 m.

B $200\sqrt{2}$ m.

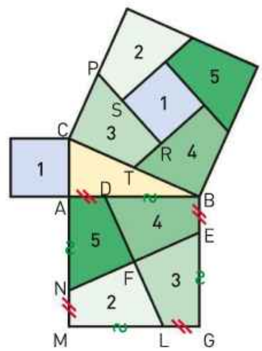
C $200\sqrt{3}$ m.

D $200\sqrt{5}$ m.

APPROFONDIMENTO

Scomponiamo Pitagora

Osserva i quadrilateri equivalenti…



▸ Problema e risoluzione.

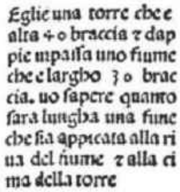
▸ LABORATORIO **MATEMATICA E STORIA**

Problemi secolari con il teorema di Pitagora

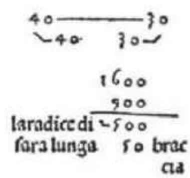
Leggi con attenzione il testo del problema tratto dall'*Aritmetica* di Filippo Calandri, opera del 1491, e da esso ricava l'altezza della torre e la larghezza del fiume.

a. Cosa richiede di determinare il problema?

b. Risolvi il problema e ricerca all'interno del documento i valori numerici che hai via via ottenuto.



Eglie una torre che e alta 40 braccia e dap pie inpassa uno fiume che e largho 30 braccia. uo sapere quanto sara lungha una fune che sia appicata alla riua del fiume e alla cima della torre



▸ Risoluzione. ▸ 4 esercizi in più. ▸ Attività di ricerca: A cosa serve la matematica?

60 Disegna un triangolo isoscele ABC di base $AB = 72$ cm e lato obliquo $BC = 60$ cm. All'interno di ABC considera il triangolo isoscele ABD di base AB e lato obliquo $BD = 45$ cm. Calcola l'area del quadrilatero $ADBC$. [756 cm^2]

61 EUREKA! **Lontani è meglio!** Un atollo ha la forma di una corona circolare delimitata da due circonferenze concentriche di raggi 1 km e 6 km rispettivamente.
Giovanni e Marco sono i soli abitanti dell'atollo; dopo un temporale che ha distrutto le loro capanne, essi decidono di ricostruirle il più lontano possibile l'una dall'altra, in modo però che esista un percorso rettilineo che le congiunge e che giace interamente sull'atollo.
Quanto disteranno tra loro le capanne di Giovanni e Marco? (Supponi che le due circonferenze che delimitano l'atollo facciano parte di esso.)

A $\frac{\sqrt{35}}{2}$ km B $\frac{\sqrt{37}}{2}$ km C $\sqrt{37}$ km D $2\sqrt{35}$ km E $2\sqrt{37}$ km

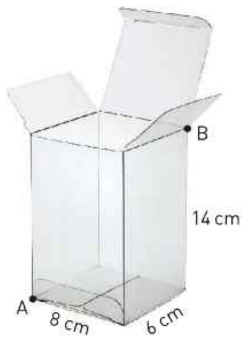
[Giochi di Archimede, 2005]

62 INVALSI 2003 Una scatola ha dimensioni $6 \times 6 \times 3$ (con le lunghezze espresse in cm).
Quale lunghezza potrà avere al massimo uno stecchino per entrare completamente nella scatola?

A 6 cm.
B 7 cm.
C 8 cm.
D 9 cm.
E 10 cm.

63 Gli spigoli di base di un parallelepipedo rettangolo misurano 9 cm e 12 cm e la diagonale misura 39 cm. Calcola l'altezza del parallelepipedo. [36 cm]

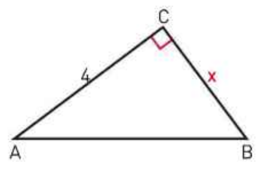
64 INTORNO A NOI Calcola la lunghezza della diagonale AB della scatola in figura. [$2\sqrt{74}$ cm]



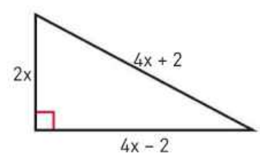
Problemi algebrici

65 INVALSI 2007 In un triangolo rettangolo la misura di un cateto, in centimetri, è 4. Se l'altro cateto ha lunghezza x, qual è l'espressione della lunghezza i dell'ipotenusa?

A $i = \sqrt{x-4}$
B $i = \sqrt{x+4}$
C $i = \sqrt{x^2+4}$
D $i = \sqrt{x^2+16}$



66 Determina il valore di x, sapendo che le misure sono espresse in centimetri.



[8 cm]

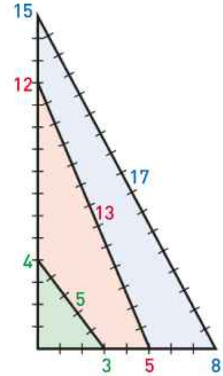
67 Determina le lunghezze dei lati di un rettangolo, sapendo che la diagonale misura 169 cm e che la base è i $\frac{5}{12}$ dell'altezza. [65 cm; 156 cm]

68 In un rombo di area 216 cm^2, la diagonale maggiore è $\frac{8}{5}$ del lato. Determina il perimetro. [60 cm]

69 In un triangolo isoscele la base misura 64 cm e il lato obliquo supera di 16 cm l'altezza relativa alla base. Trova la lunghezza del lato del quadrato che ha il perimetro uguale al perimetro del triangolo. [36 cm]

▸ LABORATORIO **APPROFONDIMENTO**

Triangolazioni pitagoriche



Giorgio: «Se un triangolo è pitagorico, cioè le misure dei lati formano una terna pitagorica, allora le misure della sua area e del suo perimetro sono numeri interi».
Erika: «Come mai? Dato che è necessario dividere per due, perché l'area è sempre un numero intero?».
Giorgio: «Pensa a cosa accadrebbe se le misure dei cateti fossero entrambe numeri dispari».
Erika: «Però il contrario non è vero, cioè un triangolo rettangolo con area e perimetro interi non è detto che sia "pitagorico". Prova a considerarne uno con ipotenusa di 6 cm e area di 7 cm^2. Il perimetro dovrebbe risultare 14 cm».

a. Mostra che l'ultima affermazione di Erika è corretta.

b. Sviluppa il ragionamento di Giorgio. Cosa succede se le misure di entrambi i cateti sono dispari? Cosa puoi dedurre quindi sulle misure dei cateti di un triangolo pitagorico?

▸ Risoluzione. ▸ Un esercizio in più.

70 EUREKA! **Ottuso ma di poco** In un triangolo le misure dei lati sono 17, 24 e k, con k numero naturale. Qual è il più piccolo valore di k per il quale il triangolo è ottusangolo, con il lato di lunghezza k opposto all'angolo ottuso?

[USA ICTM, Math Contest, 2011]

3. PARTICOLARI TRIANGOLI RETTANGOLI

TRIANGOLI RETTANGOLI CON ANGOLI DI 45°

Teoria a pagina G150

71 TEST L'area di un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa a misura:

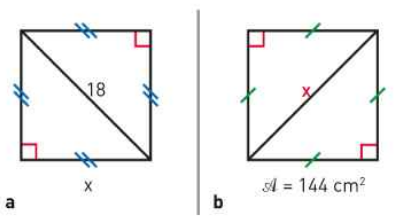
A a^2. B $\frac{a^2}{4}$. C $\frac{a^2}{2}$. D $\frac{a^2}{16}$.

72 TEST La diagonale di un quadrato di perimetro $8k$ misura:

A $4k$. B $\sqrt{2}\,k$. C $2\sqrt{2}\,k$. D $4\sqrt{2}\,k$.

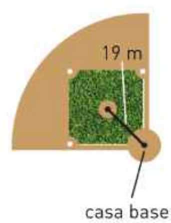
73 Nel triangolo rettangolo isoscele ABC, il punto D sul cateto AC è tale che AD è la metà dell'ipotenusa AB. Dimostra che ABC è equivalente al quadrato costruito su AD.

74 Determina il valore di x.



75 Un parallelogramma ha la base di 30 m, l'altezza di 10 m e un angolo interno di 45°. Calcola il perimetro del parallelogramma. $[20(3+\sqrt{2})\text{ m}]$

76 INTORNO A NOI **Casa base** In un campo da baseball le «basi» sono i vertici di un quadrato, detto «diamante». Se la distanza tra la casa base e il centro del diamante è di circa 19 m, quanto misurano perimetro e area del diamante?

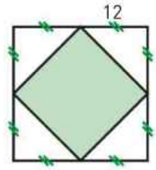


$[76\sqrt{2}\text{ m}; 722\text{ m}^2]$

77 Un quadrato è inscritto in una circonferenza di raggio 22 cm. Calcola la sua area. [968 cm^2]

78 Calcola perimetro e area del quadrato colorato.

[$48\sqrt{2}$ cm; 288 cm^2]



79 EUREKA! **Un triangolo gigante** La misura dei cateti di un triangolo rettangolo isoscele è 4^{10}. Quanto misura la sua ipotenusa?

A $4^{10,25}$ B $4^{10,5}$ C $4^{10,75}$ D 4^{11} E $4^{11,25}$

[USA University of Maryland, 2012]

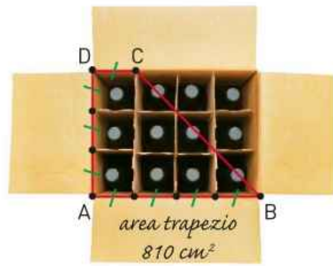
80 In una circonferenza di raggio r è inscritto un quadrato. Determina per quali valori di r l'area del quadrato è maggiore di 18 cm^2. [$r > 3$ cm]

81 Nel triangolo ABC, $\widehat{A} = 135°$, $AB = 6$ cm e $AC = 3\sqrt{2}$ cm. Determina la lunghezza di BC.

[$3\sqrt{10}$ cm]

82 Calcola il perimetro del trapezio $ABCD$.

[$(18\sqrt{6} + 48\sqrt{3})$ cm]



TRIANGOLI RETTANGOLI CON ANGOLI DI 30° E 60°

Teoria a pagina G150

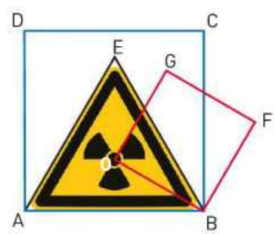
83 TEST Il lato di un triangolo equilatero di altezza h misura:

A $\frac{h}{2}$. B $\frac{\sqrt{3}}{3}h$. C $\frac{\sqrt{3}}{2}h$. D $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$.

84 TEST L'area di un triangolo rettangolo con un angolo di 60° e ipotenusa che misura a è:

A $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. B $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$. C $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. D $\frac{\sqrt{2}}{8}a^2$.

85 Nella figura, il punto O è il centro del triangolo equilatero ABE. Dimostra che il quadrato $ABCD$ è equivalente al triplo del quadrato $OBFG$.



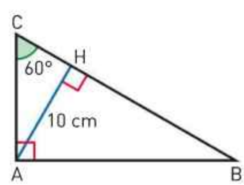
86 COMPLETA osservando la figura.

a. $AC =$ ☐ cm.

b. $AB =$ ☐ cm.

c. $BC =$ ☐ cm.

d. $BH =$ ☐ cm.

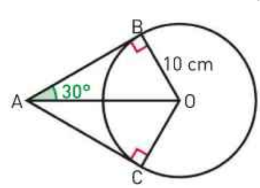


87 Un triangolo rettangolo con un angolo di 30° è inscritto in una circonferenza di raggio 12 cm. Calcola il perimetro. [$12(3 + \sqrt{3})$ cm]

88 YOU & MATHS **The unknown side** Let ABC be an equilateral triangle of area $64\sqrt{3}$ cm^2. Find the length of its side. [16 cm]

89 Calcola l'area del quadrilatero $ABOC$ in figura.

[$100\sqrt{3}$ cm^2]



90 Nel trapezio rettangolo $ABCD$, CH è l'altezza relativa alla base maggiore AB e $\widehat{C} = 120°$. Sapendo che $BC = 2\sqrt{15}$ cm e che l'area del rettangolo $AHCD$ è di $3\sqrt{5}$ cm^2, determina il perimetro del trapezio. $[(2 + 3\sqrt{15} + 3\sqrt{5})\text{ cm}]$

91 ESEMPIO DIGITALE Un rombo ha gli angoli interni di 120° e 60° e la diagonale minore di 20 cm. Calcola la misura della diagonale maggiore e l'area del rombo.

92 Nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{A}$ misura 45° e l'angolo $\widehat{C}$ misura 60°; inoltre, il lato BC misura 12 cm. Determina perimetro e area del triangolo. $[6(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})\text{ cm}; 18(3+\sqrt{3})\text{ cm}^2]$

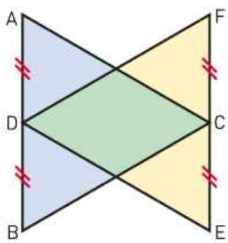
93 Un trapezio scaleno ha gli angoli adiacenti alla base maggiore di 30° e 45° e la base minore misura 10 m, come l'altezza. Calcola il perimetro e l'area del trapezio. $[10(5+\sqrt{3}+\sqrt{2})\text{ m}; 50(3+\sqrt{3})\text{ m}^2]$

94 Un quadrato di lato 9 cm è inscritto in un triangolo equilatero e ha un lato che poggia sulla base del triangolo. Qual è la lunghezza del lato del triangolo? $[3(3+2\sqrt{3})\text{ cm}]$

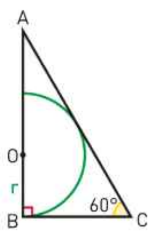
95 INVALSI 2006 Se un triangolo equilatero e un quadrato hanno lo stesso perimetro, e l'area del triangolo è $9\sqrt{3}$ cm^2, quanto misura, in cm, il lato del quadrato?

A $2\sqrt{3}$ B $\frac{9}{2}$ C $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ D 8

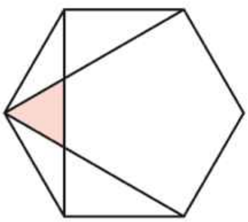
96 La figura rappresenta due triangoli equilateri congruenti, di lato 8 cm. Quanto misura l'area comune ai due triangoli? $[8\sqrt{3}\text{ cm}^2]$



97 Calcola perimetro e area del triangolo in figura, sapendo che il raggio della semicirconferenza è di 6 cm. $[18(\sqrt{3}+1)\text{ cm}; 54\sqrt{3}\text{ cm}^2]$



98 **Regolari** Nella figura è rappresentato un esagono regolare di lato 18 cm. Dimostra che il triangolo colorato è equilatero e trovane il perimetro e l'area. $[18\sqrt{3}\text{ cm}; 27\sqrt{3}\text{ cm}^2]$



99 In un triangolo rettangolo, di perimetro $(6+2\sqrt{3})$ cm, un angolo ha ampiezza di 30°. Calcola la lunghezza dell'ipotenusa. [4 cm]

100 In un trapezio isoscele di area $300\sqrt{3}$ m^2, ciascun lato obliquo forma con la base maggiore AB un angolo di 60° e la diagonale BD è perpendicolare al lato AD. Calcola la lunghezza di BD. $[20\sqrt{3}\text{ m}]$

101 EUREKA! **Lati pitagorici** I lati di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente a, b e c, con a, b e c numeri naturali e con $a < b < c$ e $c - a = 9$. Qual è l'area del triangolo?

[USA Mu Alpha Teta, National Convention Test, 2014]

Problemi algebrici

102 Nel triangolo ABC, la lunghezza del lato AB è di $(2+2\sqrt{3})$ cm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo, sapendo che le ampiezze degli angoli adiacenti ad AB sono 45° e 30°. $[2(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})\text{ cm}; (2+2\sqrt{3})\text{ cm}^2]$

103 Un trapezio isoscele ha gli angoli adiacenti alla base minore di 135°. Sapendo che la somma delle due basi vale 18 cm e che il quadruplo della base minore diminuito della base maggiore vale 7 cm, calcola la lunghezza del lato obliquo. $[4\sqrt{2}\text{ cm}]$

104 Nel parallelogramma $ABCD$,

$\widehat{A} = 30°$ e $DH \cong \frac{1}{6}AB$.

Sapendo che l'area è di 54 m², calcola il perimetro di $ABCD$. [48 m]

105 In un triangolo rettangolo, un angolo misura 30° e il perimetro misura $(6 + 2\sqrt{3})$ cm. Determina l'area. [$2\sqrt{3}$ cm²]

LABORATORIO | **MATEMATICA INTORNO A NOI**

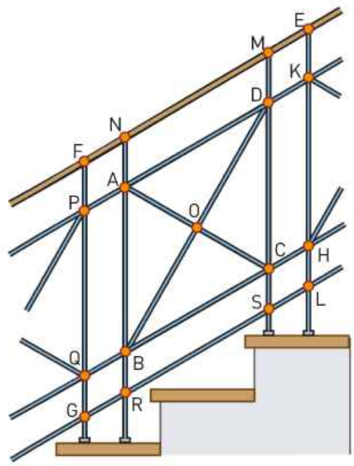
Un modulo in ferro

Il fabbro Mino deve realizzare, per una ringhiera in ferro, il modulo della figura.

a. Sapendo che BD è perpendicolare ad AC, che AB è congruente e parallelo a CD, che l'angolo $A\widehat{D}O = 30°$ e infine che MD, DK, EK, ME, CS sono congruenti e pari a un quarto di CD, disegna con riga e compasso o con un programma di geometria dinamica il modulo che costituisce la ringhiera.

b. Poiché SM deve essere alto almeno un metro, calcola la quantità minima di ferro (in metri) che occorre per costruire un modulo della ringhiera.

c. Quanti metri di ferro occorrono, se si modifica il disegno della ringhiera aggiungendo i segmenti AF, BG, DE, CL, ma considerando AB lungo 1 m?



▸ Risoluzione.

4. SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE

Teoria a pagina G151

106 **TEST** Indica quale delle seguenti affermazioni esprime il secondo teorema di Euclide.

In un triangolo rettangolo, il quadrato che ha per lato l'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati:

- **A** i cateti.
- **B** l'ipotenusa e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa.
- **C** le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
- **D** l'ipotenusa e un cateto.

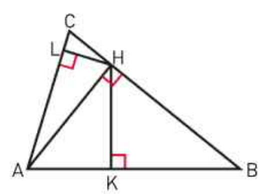
107 **VERO O FALSO?** Considerando la figura, puoi affermare che:

a. $\overline{CL} \cdot \overline{LA} = \overline{LH}^2$ V F

b. $\overline{CH} \cdot \overline{HB} = \overline{AH}^2$ V F

c. $\overline{HK}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AK}$ V F

d. $\overline{AK} \cdot \overline{BK} = \overline{BH}^2 - \overline{BK}^2$ V F



Costruzioni

108 Dato un segmento AB, dividilo in due parti, AH e HB, tali che il rettangolo di lati congruenti ad AH e HB sia equivalente a un quadrato di lato $\frac{1}{3}AB$.

109 **Da un rettangolo a un quadrato** Disegna un rettangolo $ABCD$ e costruisci un quadrato a esso equivalente utilizzando il secondo teorema di Euclide.

110 Disegna un triangolo PQR in modo che il quadrato costruito sull'altezza PH relativa al lato maggiore RQ sia:

a. maggiore del rettangolo di lati RH e QH;

b. minore del rettangolo di lati RH e QH.

Dimostrazioni

ESEMPIO

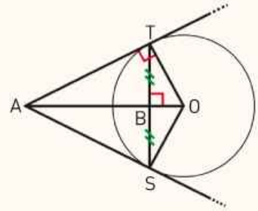
Da un punto A esterno a una circonferenza di centro O tracciamo le tangenti AT e AS. Detto B il punto di intersezione tra AO e TS, dimostriamo che il quadrato costruito su TS è il quadruplo del rettangolo di lati congruenti ad AB e BO.

Ipotesi: AS, AT tangenti **Tesi:** $\overline{TS}^2 = 4 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BO}$

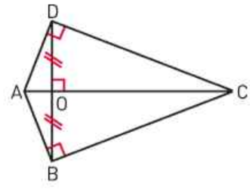
DIMOSTRAZIONE

Il segmento AO è asse di simmetria del quadrilatero $ASOT$, quindi è anche asse del segmento TS; risulta perciò $BT \perp AO$ e $BT \cong \frac{1}{2} TS$. Allora $\overline{TS}^2 = (2\overline{BT})^2 = 4\overline{BT}^2$.

Il triangolo ATO è rettangolo in T, essendo T punto di tangenza. Allora, per il secondo teorema di Euclide, $\overline{BT}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BO}$. Sostituiamo nella relazione precedente e concludiamo che $\overline{TS}^2 = 4 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BO}$.



111 Con riferimento al deltoide in figura, dimostra che il quadrato costruito su BD è equivalente al quadruplo del rettangolo che ha i lati congruenti a OA e OC.



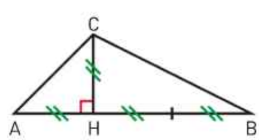
112 I segmenti PQ e PR sono rispettivamente un diametro e una corda di una circonferenza. Sia H la proiezione di R su PQ e sia S un punto sulla tangente alla circonferenza passante per P tale che $PS \cong HQ$. Costruisci il rettangolo $PHKS$ e dimostra che è equivalente al quadrato di lato RH.

113 Il trapezio rettangolo $ABCD$ è circoscritto alla semicirconferenza di diametro AB. Detto P il punto della semicirconferenza appartenente al lato obliquo CD, dimostra che il quadrato costruito sul raggio è equivalente al rettangolo i cui lati sono congruenti a CP e PD.
(*Suggerimento.* Dimostra che l'angolo $C\widehat{O}D$ è retto, quindi…)

114 In un triangolo ABC, rettangolo in A, traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Dimostra che la differenza dei quadrati di lati AB e HB è equivalente al rettangolo di lati BH e CH.

115 Dato un triangolo ABC, rettangolo in B, considera l'altezza BH relativa all'ipotenusa; considera poi l'altezza HK relativa all'ipotenusa del triangolo ABH. Dimostra che il rettangolo di lati AH e HC è equivalente al rettangolo di lati AB e BK.

116 **CHI HA RAGIONE?** Giulio: «Guarda qui: nel triangolo rettangolo isoscele ACH ho prolungato AH di un segmento $HB \cong 2AH$ e congiunto C con B. Applicando il secondo teorema di Euclide, $\overline{AH} \cdot \overline{HB} = \overline{CH}^2$. Ma allora $\overline{AH} \cdot (2\overline{AH}) = \overline{AH}^2$, cioè $2 \cdot \overline{AH}^2 = \overline{AH}^2$ e quindi $2 = 1$!».
Marta: «Non hai dimostrato un assurdo, hai piuttosto fatto un errore!».
Di cosa si tratta?

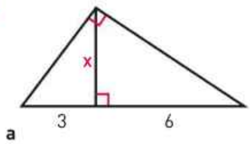


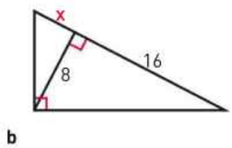
2 = 1!?

Con le misure

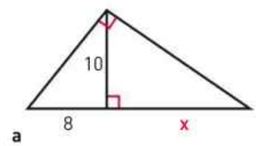
Calcola il valore di x.

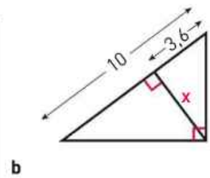
117





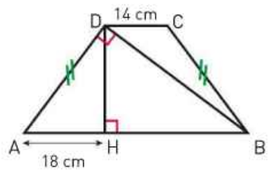
118





119 In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa misura 12 m e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa misura 18 m. Calcola perimetro e area del triangolo. $[(26+10\sqrt{13})\text{ m}; 156\text{ m}^2]$

120 YOU & MATHS **Use your image** Find the area of the trapezium using the information in the figure.

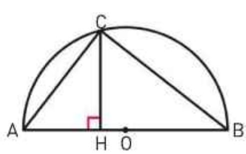


$[768\text{ cm}^2]$

121 Nel trapezio $ABCD$, la diagonale maggiore BD è perpendicolare al lato obliquo AD e la base minore è congruente all'altezza. Sapendo che la base maggiore è lunga 20 cm e la proiezione del lato AD su di essa è lunga 4 cm, determina l'area del trapezio. $[112\text{ cm}^2]$

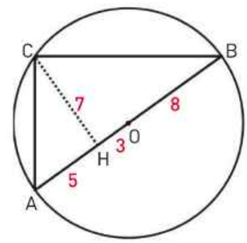
122 Un cerchio è inscritto in un rombo e ogni lato del rombo è diviso dal punto di tangenza in due segmenti lunghi 1 cm e 3 cm. Calcola le lunghezze del raggio del cerchio e delle diagonali del rombo. $[\sqrt{3}\text{ cm}; 4\text{ cm}; 4\sqrt{3}\text{ cm}]$

123 Calcola l'area e il perimetro del triangolo ABC, sapendo che $AO = 9$ cm e $CH = 4\sqrt{5}$ cm. $[36\sqrt{5}\text{ cm}^2; (30+6\sqrt{5})\text{ cm}]$



124 In un triangolo rettangolo, la proiezione del cateto maggiore sull'ipotenusa supera di 8 cm l'altezza relativa all'ipotenusa, che a sua volta supera di 6 cm la proiezione del cateto minore sull'ipotenusa. Calcola la lunghezza dell'ipotenusa. [50 cm]

125 CACCIA ALL'ERRORE Cosa non torna in questa figura?



126 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, la proiezione BH di AB sull'ipotenusa è lunga 63 cm e $CH = 2BH - 14$ cm. Calcola l'area del triangolo ABH. $[2646\text{ cm}^2]$

127 Calcola perimetro e area del rettangolo $ABCD$ in figura. $[442a; 10140a^2]$

128 Determina l'area di un triangolo rettangolo in cui le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono lunghe 12 cm e 24 cm. $[216\sqrt{2}\text{ cm}^2]$

129 In un trapezio inscritto in una semicirconferenza di raggio 15 cm, la base minore è lunga 18 cm. Determina l'area del trapezio. $[288\text{ cm}^2]$

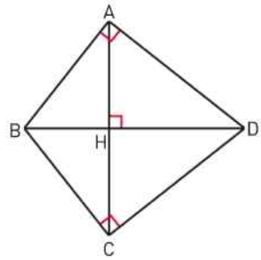
130 Un triangolo isoscele è inscritto in una circonferenza. Determina la lunghezza del raggio della circonferenza, sapendo che la base del triangolo è lunga 144 cm e l'altezza 96 cm. [75 cm]

Problemi algebrici

131 In un triangolo rettangolo con area di 980 cm², le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono una $\frac{1}{4}$ dell'altra. Determina l'ipotenusa. [70 cm]

132 Un trapezio rettangolo ha la diagonale minore perpendicolare al lato obliquo. Sapendo che l'altezza misura 24 cm e che la base maggiore supera la minore di 18 cm, calcola il perimetro e l'area del trapezio. [136 cm; 984 cm²]

133 Nel deltoide in figura, BD è lungo 80 cm e $BH \cong \frac{2}{3} DH$; calcola l'area di $ABCD$. [$1280\sqrt{6}$ cm²]



PROBLEMI DI RIEPILOGO

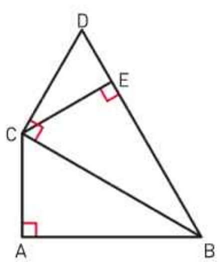
134 VERO O FALSO? Individua le affermazioni vere tra le seguenti e indica quali teoremi esprimono.
In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente:

a. al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa. V F
b. alla differenza dei quadrati costruiti sull'ipotenusa e sull'altro cateto. V F
c. al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa. V F
d. al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. V F

135 VERO O FALSO?

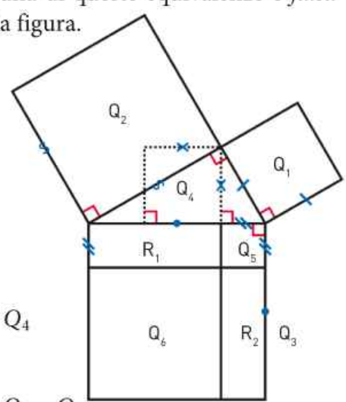
a. L'area di un triangolo equilatero di lato 5 cm è $\frac{25}{2}\sqrt{3}$ cm². V F
b. Conoscendo le lunghezze dei lati di un triangolo, si può stabilire se è rettangolo. V F
c. Il lato di un quadrato di diagonale $4a$ è $2\sqrt{2}\,a$. V F
d. In un triangolo isoscele con gli angoli alla base di 30°, se il lato misura 2, la base misura $2\sqrt{3}$. V F

136 VERO O FALSO? Rispondi osservando la figura.



a. $\overline{BE} \cdot \overline{ED} = \overline{CE}^2$ V F
b. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$ V F
c. $\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{EB}^2$ V F
d. $\overline{DE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DE}$ V F

137 TEST Solo una di queste equivalenze è *falsa* in relazione alla figura.
Quale?



A $Q_6 \doteq Q_2 - Q_4$
B $R_1 \doteq Q_4$
C $Q_3 - Q_2 \doteq Q_4 - Q_5$
D $Q_1 \doteq Q_5 + R_2$

138 TEST In un triangolo ABC, rettangolo in C, l'altezza CH è congruente alla metà del cateto BC. Allora BH è congruente a:

A $3AC$. B $2AH$. C $2AC$. D $3AH$.

Dimostrazioni

139 Nel rombo $ABCD$ di centro O traccia il segmento OH perpendicolare al lato AD. Dimostra che $\overline{AC}^2 = 4\overline{AD} \cdot \overline{AH}$.

140 Nel triangolo rettangolo PQR, di ipotenusa PQ, traccia la mediana PM e la perpendicolare MN all'ipotenusa. Dimostra che il quadrato costruito su PR è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti su PN e NQ.

141 Dato il rettangolo $ABCD$ con $AB > BC$, considera la semicirconferenza di diametro AB esterna a esso e scegli su tale semicirconferenza un punto P. Dimostra che la differenza dei quadrati costruiti su CP e DP è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti su BP e AP.

142 Dimostra che in un trapezio circoscritto a una circonferenza la somma dei quadrati dei lati obliqui è equivalente alla somma dei quadrati delle distanze dei vertici dal centro.

143 ESEMPIO DIGITALE È dato il triangolo ABC, isoscele sulla base AB. Detta BH l'altezza relativa al lato AC, dimostra che il quadrato costruito su AB è equivalente al doppio del rettangolo di lati AC e AH.

144 Dato un triangolo ABC, rettangolo in C, considera l'altezza relativa CH. Detto O il punto medio dell'ipotenusa, prendi sulla retta AB un punto N tale che $HO \cong NH$. Dimostra che il quadrato costruito su ON è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti sull'ipotenusa e sul doppio di CH.

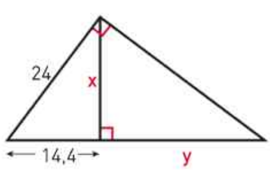
145 Disegna un parallelogramma $ABCD$ e dimostra che la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali AC e BD è equivalente al doppio della somma dei quadrati costruiti sui lati AB e BC.

146 Nel triangolo rettangolo ABC prendi i punti D ed E, rispettivamente sui cateti AB e BC. Dimostra che $\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{DE}^2$.

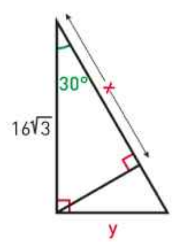
Problemi numerici

Nelle seguenti figure sono indicate le misure di alcuni segmenti, espresse in centimetri. Calcola *x* e *y*.

147

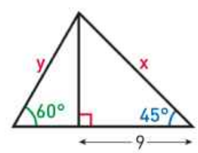


a

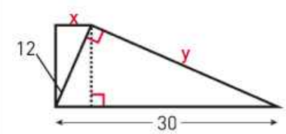


b

148



a



b

149 In un triangolo rettangolo, l'ipotenusa misura $100a$ e la proiezione di un cateto su di essa è i $\frac{16}{25}$ dell'ipotenusa stessa.

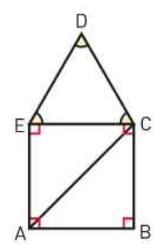
Calcola l'area del triangolo. $[2400\,a^2]$

150 La diagonale AC di un rettangolo misura $4k$ e divide l'angolo $\widehat{A}$ in due parti, di cui l'una è la metà dell'altra.

Calcola il perimetro del rettangolo. $[4k(1+\sqrt{3})]$

151 Calcola perimetro e area del poligono $ABCDE$, sapendo che $AC = 16$ cm.

$[40\sqrt{2}$ cm; $32(4+\sqrt{3})$ cm$^2]$



152 Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice $\widehat{A} = 120°$ e l'altezza relativa alla base BC che misura $6a$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo. $[12a(2+\sqrt{3}); 36a^2\sqrt{3}]$

153 Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di diametro AB. La diagonale AC misura 12 cm e, detta E la proiezione di C su AB, si ha che $AE \cong 3EB$.
Determina l'area del trapezio. $[36\sqrt{3}\ \text{cm}^2]$

154 Un parallelogramma $ABCD$ ha l'altezza relativa al lato AB di 9 cm e l'angolo $D\widehat{A}B$ di 45°.

Sapendo che l'altezza divide la base in due parti tali che una è $\frac{1}{3}$ dell'altra, calcola il perimetro del parallelogramma.
$[18(4+\sqrt{2})\ \text{cm oppure}\ 6(4+3\sqrt{2})\ \text{cm}]$

155 I lati obliqui di un trapezio formano con la base maggiore due angoli di 30° e 60°. Sapendo che l'altezza del trapezio è lunga 9 cm e che la base minore è di 6 cm, determina le misure del perimetro e dell'area del trapezio.
$[6(5+3\sqrt{3})\ \text{cm}; 54(1+\sqrt{3})\ \text{cm}^2]$

156 Un cateto di un triangolo rettangolo è i $\frac{5}{3}$ della sua proiezione sull'ipotenusa e la somma di tale cateto con l'ipotenusa vale 120 cm. Calcola il perimetro del triangolo, l'area e l'altezza relativa all'ipotenusa. [180 cm; 1350 cm^2; 36 cm]

157 Nel parallelogramma $ABCD$ di perimetro 178 cm, il lato AD supera la sua proiezione AH su AB di 25 cm e $AD + AH = 49$ cm. Determina l'area di $ABCD$. [1820 cm^2]

158 In un quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza di diametro AC la diagonale maggiore interseca perpendicolarmente la diagonale minore nel suo punto medio. Sapendo che $BD \cong \frac{4}{5}AC$ e che l'area di $ABCD$ è di 40 cm^2, determina il suo perimetro. $[12\sqrt{5}\ \text{cm}]$

159 ESEMPIO DIGITALE In una circonferenza di centro O, la somma della corda AB, che è perpendicolare al diametro CD e lo incontra nel proprio punto medio H ($CH < HD$), e del segmento HD è uguale a 40 cm. Sapendo che la corda AD è lunga 20 cm, determina l'area del triangolo ABD.

160 Sui lati di un triangolo rettangolo isoscele, con ipotenusa lunga 20 cm, costruisci tre triangoli equilateri. Calcola l'area dell'esagono ottenuto.
$[100(1+2\sqrt{3})\ \text{cm}^2]$

161 Un rombo $ABCD$ ha il perimetro di 30 cm e la diagonale minore di 9 cm. Calcola la lunghezza dell'altezza EF passante per il punto di intersezione delle diagonali. [7,2 cm]

162 In un triangolo ABC, rettangolo in C, la mediana CM, lunga 8 cm, forma con l'ipotenusa un angolo di 60°. L'angolo in B misura invece 30°. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.
$[(24+8\sqrt{3})\ \text{cm}; 32\sqrt{3}\ \text{cm}^2]$

163 Se un triangolo isoscele ha la base lunga 24 cm, qual è la lunghezza di un suo lato obliquo se la sua area è 192 cm^2? Qual è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo? [20 cm; 12,5 cm]

164 In un triangolo rettangolo la somma dei cateti è $41a$. Sapendo che l'ipotenusa misura $29a$, determina l'area del quadrato che ha lo stesso perimetro del triangolo rettangolo. $[306{,}25a^2]$

165 Un triangolo isoscele ha la base uguale ai $\frac{6}{5}$ del lato obliquo e il perimetro è di 64 cm. Calcola la misura delle altezze relative alla base e al lato obliquo del triangolo. [16 cm; 19,2 cm]

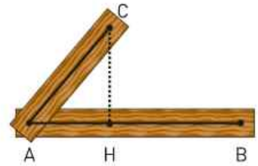
166 In un trapezio isoscele $ABCD$, la diagonale BD è perpendicolare al lato obliquo AD. Sapendo che la base maggiore AB è i $\frac{5}{3}$ del lato obliquo e che l'area del trapezio è di 122,88 dm^2, calcola il perimetro del trapezio. [49,6 dm]

167 Un trapezio rettangolo ha un angolo di 135° e il lato obliquo lungo 8 cm. Quale lunghezza x deve avere la base minore affinché l'area sia maggiore di 40 cm^2? $[x > 3\sqrt{2}\ \text{cm}]$

168 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa supera di $8a$ il cateto maggiore, mentre il cateto minore è i $\frac{2}{5}$ della somma tra il cateto maggiore e l'ipotenusa. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.
$[70a; 210a^2]$

169 L'area di $ABCD$, ottenuto costruendo un triangolo equilatero sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele, è di $36(1+\sqrt{3})\ \text{cm}^2$.
Calcola il suo perimetro. $[12(2+\sqrt{2})\ \text{cm}]$

170 EUREKA! **Due asticelle** Due asticelle AB e AC sono imperniate nell'estremità comune A in modo che l'angolo tra esse possa variare. Gianni segna sulle asticelle due segmenti $AB = 17$ cm e $AC = 8$ cm. A quale distanza CH dall'asticella AB deve trovarsi il punto C affinché le due asticelle rappresentino il cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo? [7,06 cm]



171 Dato un triangolo rettangolo, la diagonale del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 4 cm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo, sapendo che uno dei cateti è lungo 3 cm. $[6(2+\sqrt{2})\text{ cm}; 9\sqrt{2}\text{ cm}^2]$

172 In un triangolo rettangolo, un cateto è lungo 12 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa è lunga 8 cm. Calcola:

a. il perimetro del triangolo;

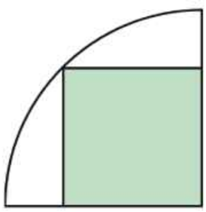
b. il lato di un quadrato a esso equivalente.

$\left[\text{a) } (30+6\sqrt{5})\text{ cm; b) } 6\sqrt[4]{5}\text{ cm}\right]$

173 Un parallelogramma ha i due lati consecutivi AB e BC lunghi rispettivamente 50 cm e 40 cm. La diagonale BD forma un angolo retto con il lato obliquo. Detti H e K i piedi delle perpendicolari condotte rispettivamente da D ad AB e da B a CD, calcola l'area del rettangolo $DHBK$. [432 cm^2]

174 La somma delle diagonali di un rettangolo di base 16 m è 68 m. Considera un quadrato isoperimetrico al rettangolo e calcola la differenza fra le loro aree. [49 m^2]

175 Calcola l'area del quadrato colorato nella figura, sapendo che il raggio della circonferenza è lungo 22 cm. [242 cm^2]



176 In un trapezio isoscele, la base maggiore misura $50a$, la base minore misura $14a$ e le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. Calcola il perimetro e l'area del trapezio. $[124a; 768a^2]$

177 La proiezione della semidiagonale minore di un rombo su un lato è lunga 45 cm e la semidiagonale maggiore è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sul lato. Determina area e perimetro del rombo. [15 000 cm^2; 500 cm]

178 ESEMPIO DIGITALE L'altezza di un trapezio isoscele è lunga 21 cm e la proiezione di un lato obliquo sulla base maggiore è i $\frac{2}{3}$ dell'altezza. Sapendo che la diagonale è perpendicolare al lato obliquo, calcola perimetro e area del trapezio.

179 ESEMPIO DIGITALE In un rombo $ABCD$, il raggio OH della circonferenza inscritta perpendicolare al lato AD divide quest'ultimo in due parti DH e AH tali che AH supera DH di 6 cm. Determina la lunghezza di OH, sapendo che $OH \cong \sqrt{3}\,DH$.

180 ESEMPIO DIGITALE Il triangolo ABC ha gli angoli adiacenti alla base BC di 30° e 45°. Calcola il suo perimetro, sapendo che ha un'area di $32(1+\sqrt{3})\text{cm}^2$.

181 Nel triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa BC è lunga 36 cm e la mediana AM relativa all'ipotenusa è congruente ad AB. Calcola l'area del triangolo ABM. $[81\sqrt{3}\text{ cm}^2]$

182 In un trapezio rettangolo, l'angolo acuto misura 60°, il lato obliquo misura 20 cm e la base minore è congruente all'altezza.
Calcola l'area del trapezio. $[50(\sqrt{3}+6)\text{ cm}^2]$

183 Determina il perimetro del quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza di raggio 5 cm, sapendo che $CD = 3{,}5$ cm e DB e AC sono rispettivamente i $\frac{3}{5}$ e i $\frac{24}{25}$ del diametro AB. [24,3 cm]

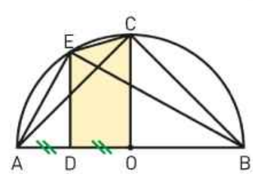
184 TEST Detto r il raggio della circonferenza, quale di queste espressioni rappresenta l'area del trapezio $CEDO$?

A $(\sqrt{3}+1)\frac{r^2}{2}$

B $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\frac{r^2}{2}$

C $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\frac{r^2}{4}$

D $(\sqrt{3}+1)r^2$



185 In un trapezio isoscele $ABCD$ le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. Il lato obliquo misura 45 cm ed è i $\frac{5}{3}$ della sua proiezione sulla base maggiore AB. Determina:

a. il perimetro del trapezio;

b. la lunghezza della diagonale di un quadrato equivalente al trapezio.

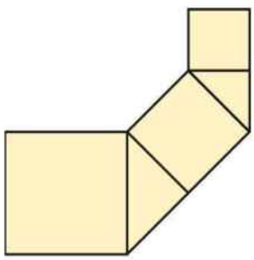
[a) 186 cm; b) $24\sqrt{6}$ cm]

186 Nel triangolo rettangolo ABC sia M il punto medio dell'ipotenusa AB. Se $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AC}^2$, qual è l'ampiezza dell'angolo $C\widehat{A}B$? [45°]

187 Dato un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza 12 cm e $12\sqrt{3}$ cm, calcola l'area del rettangolo inscritto nel triangolo che ha l'altezza del triangolo, relativa all'ipotenusa, come diagonale.

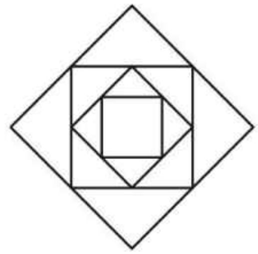
[$27\sqrt{3}$ cm^2]

188 INVALSI 2006 La figura a fianco è formata da 3 quadrati e 2 triangoli rettangoli isosceli. Quanto vale la sua area se il lato del quadrato più grande misura 2 cm?



A $9{,}5$ cm^2 B 9 cm^2 C $8{,}5$ cm^2 D 8 cm^2

189 INVALSI 2014 Si è costruita la figura che vedi inserendo nel quadrato più grande un secondo quadrato i cui vertici sono i punti medi dei lati del primo. Si è ripetuta la stessa procedura, inserendo altri due quadrati. Se la superficie del quadrato più grande misura 64 cm^2, quanto misura il lato del quadrato più piccolo?

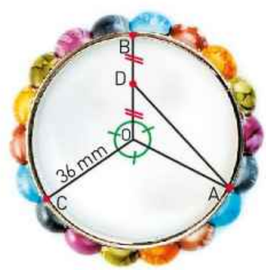


A 2 cm C 4 cm

B $2\sqrt{2}$ cm D $4\sqrt{2}$ cm

190 Calcola la lunghezza di AD, sapendo che O è il centro della circonferenza del bracciale.

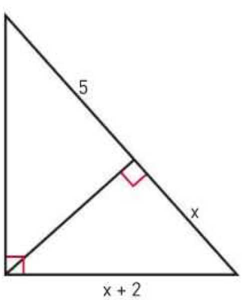
[$18\sqrt{7}$ mm]



Problemi algebrici

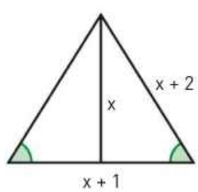
Calcola perimetro e area dei seguenti triangoli, supponendo che le misure indicate siano in centimetri.

191



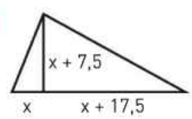
[$3(\sqrt{5}+5)$cm; $9\sqrt{5}$ cm^2]

192



[50 cm; 120 cm^2]

193



[150 cm; 937,5 cm^2]

194 Da un punto P, esterno a una circonferenza di centro O e raggio 12 cm, traccia le tangenti PA e PB. Sapendo che PO supera di 2 cm PA, calcola perimetro e area del quadrilatero $OAPB$.

[94 cm; 420 cm^2]

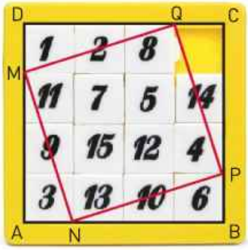
195 In una semicirconferenza di diametro $AB = 35k$ è inscritto il triangolo ABC. Detta H la proiezione del vertice C sul diametro, il segmento BH supera di $5k$ la metà di AH. Calcola l'area del triangolo. [$175\sqrt{3}\,k^2$]

196 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 25 cm e la proiezione del cateto minore sull'ipotenusa è i $\frac{3}{4}$ dell'altezza relativa all'ipotenusa.

Calcola perimetro e area del triangolo. [60 cm; 150 cm^2]

197 Nel rettangolo $ABCD$ la somma delle lunghezze della base AB e della diagonale BD è 50 cm e la loro differenza è 8 cm. Calcola l'area di $ABCD$. [420 cm^2]

198 Se l'area del quadrato rosso vale 40 cm^2, quanto vale l'area del quadrato nero? [64 cm^2]



199 In un trapezio rettangolo, l'altezza è 2 cm più corta della base maggiore e 1 cm più lunga della base minore. Sapendo che la somma dell'area del trapezio con l'area del quadrato costruito sul lato obliquo è di 43 cm^2, calcola il perimetro del trapezio. [18 cm]

200 ESEMPIO DIGITALE In un rettangolo $ABCD$, $AB = 4$ cm e $BC = 2$ cm.

Determina un punto P su AB in modo che $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 33\text{ cm}^2$.

201 In un triangolo acutangolo ABC, l'altezza AH divide BC in due parti, CH e HB, tali che $CH + HB = 17$ cm e $CH - HB = 3$ cm. Determina AH, sapendo che il perimetro del triangolo è di 68 cm. [24 cm]

202 Un parallelogramma ha i due angoli ottusi di ampiezza 150°. Il lato maggiore supera di $4\sqrt{3}$ dm il doppio del lato minore e il perimetro del parallelogramma è di $(48 + 8\sqrt{3})$ dm. Calcola la lunghezza dell'altezza relativa al lato minore. [$(8 + 2\sqrt{3})$ dm]

203 Un rombo ha l'area di $8\sqrt{3}$ cm^2 e un angolo di 120°. Calcola l'area del quadrato costruito sul lato del rombo. [16 cm^2]

204 In un trapezio rettangolo $ABCD$, la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC, $AC \cong \frac{5}{4}DC$ e $AB \cong \frac{5}{4}AC$. Determina l'area del trapezio, sapendo che il suo perimetro misura 136 cm. [984 cm^2]

205 Considera un punto arbitrario C su un segmento AB lungo 10 cm e costruisci il triangolo ACD, rettangolo in C e tale che $D\widehat{A}C = 60°$. Determina la distanza di C da A per cui ADC è equivalente a un parallelogramma di base AC e altezza BC. [$20(2 - \sqrt{3})$cm]

206 Un trapezio è inscritto in una semicirconferenza di diametro 10 cm e la sua base maggiore coincide con il diametro. Sapendo che la somma delle aree dei due triangoli equilateri costruiti sui lati obliqui è di $10\sqrt{3}$ cm^2, determina l'area del trapezio. [32 cm^2]

207 Un triangolo ABC ha $\widehat{A} = 60°$ e $\widehat{B} = 45°$, e la somma di AB e AC vale $(4\sqrt{3} + 6)$ cm.

a. Calcola l'area del triangolo.

b. Determina sull'altezza relativa ad AB un punto P tale che l'area del quadrilatero $ABCP$ sia $(6 + 5\sqrt{3})$ cm^2.

$\left[\text{a) } (9 + 5\sqrt{3})\text{cm}^2\text{; b) } CP = (3\sqrt{3} - 3)\text{ cm}\right]$

208 ESEMPIO DIGITALE In un triangolo rettangolo, la proiezione del cateto minore sull'ipotenusa misura 36 cm. Calcola il perimetro del triangolo, sapendo che il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente ai $\frac{25}{6}$ del triangolo.

209 ESEMPIO DIGITALE Un triangolo ABC ha gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ rispettivamente di ampiezza 60° e 75°. Calcola il perimetro del triangolo, sapendo che l'altezza AH è lunga $\sqrt{6}$ cm.

210 Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, la differenza tra i cateti è 3 e l'ipotenusa si ottiene aggiungendo $\frac{5}{2}$ ai $\frac{3}{2}$ del cateto minore AB.

a. Calcola l'area del triangolo.

b. Determina sul cateto maggiore AC un punto D in modo che l'area del triangolo ABD sia un terzo dell'area di ABC.

$\left[\text{a) } (10 - 3\sqrt{5})\text{ cm}^2\text{; b) } AD = \frac{2}{3}\sqrt{5}\text{ cm}\right]$

VERIFICA DELLE COMPETENZE ALLENAMENTO

▶ Competenza **2** (abilità **1, 4**)

1 Dimostra che in un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente alla somma tra il quadrato costruito sulla sua proiezione sull'ipotenusa e il rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

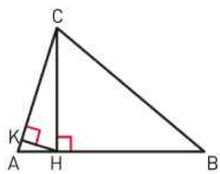
2 Nel rettangolo *ABCD*, considera la diagonale *BD*. La retta a essa perpendicolare e passante per *D* interseca i prolungamenti di *AB* e *BC* rispettivamente in *E* e *F*. Dimostra che il rettangolo di lati *AB* e *BE* è equivalente al rettangolo di lati *ED* e *DF*.

3 Dimostra che la somma dei quadrati costruiti sui lati di un rombo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle sue diagonali.

4 Data una circonferenza di diametro *AB*, scegli su di essa un punto *C* e siano *H* e *K* le proiezioni di *C*, rispettivamente, su *AB* e sulla tangente alla circonferenza passante per *A*. Dimostra che la somma dei quadrati costruiti su *CH* e *CK* è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti ad *AB* e *CK*.

5 Osservando la figura, dimostra che

$\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AC} \cdot \overline{CK}$.



▶ Competenza **2** (abilità **3**) | ▶ Competenza **3** (abilità **2, 3**)

6 TEST Nel triangolo rettangolo *ABC* i cateti *AB* e *BC* sono lunghi rispettivamente 4 e 3 unità. Sia *BH* l'altezza relativa all'ipotenusa *AC*, e sia *K* la proiezione ortogonale di *H* su *AB*. Quanto misura *HK*?

- **A** $\frac{36}{25}$
- **B** 2
- **C** $\frac{48}{25}$
- **D** $\frac{16}{9}$

7 TEST Un esagono regolare ha il lato di 1 cm. La sua area vale:

- **A** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2.
- **B** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2.
- **C** $3\sqrt{3}$ cm^2.
- **D** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

8 Nel parallelogramma *ABCD* la base *AB* è lunga $(3\sqrt{3}+2)$ cm, l'altezza *DH* relativa ad *AB* è 6 cm e l'angolo $\widehat{A}$ è di 60°. Determina il perimetro del parallelogramma e l'area del quadrilatero *HBCD*. [$(14\sqrt{3}+4)$ cm; $12(\sqrt{3}+1)$ cm^2]

9 Nel trapezio *ABCD* la diagonale *BD* è perpendicolare al lato *AD*. Sapendo che $AB = 25$ cm, $CD = 11$ cm e $AD = 15$ cm, calcola l'area di *ABCD*. [216 cm^2]

10 Il triangolo *ABC* è inscritto in una semicirconferenza di diametro *AB*. Sapendo che la proiezione di *BC* su *AB* è lunga 32,4 cm e che il raggio è di 45 cm, calcola il perimetro del triangolo. [216 cm]

11 Sia *ABCD* un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza con base minore $CD = 18$ cm e lato obliquo $BC = 25$ cm. Determina la lunghezza dei lati di un rettangolo equivalente al trapezio con la base doppia dell'altezza. [$10\sqrt{3}$ cm; $20\sqrt{3}$ cm]

12 In un parallelogramma *ABCD* la diagonale minore *BD* supera la sua proiezione *BH* sulla base *AB* di 3,2 cm e $BD \cong \frac{5}{4} BH$. Sapendo che *BD* e *AD* sono perpendicolari, calcola perimetro e area di *ABCD*. [64 cm; 192 cm^2]

VERIFICA DELLE COMPETENZE PROVE

TUTOR | PROVA A (10 esercizi) | PROVA B (10 esercizi) | IN MEZZ'ORA

PROVA C ▸ Competenze 2, 3 — IN UN'ORA

1 VERO O FALSO?

a. Un triangolo con lati di 8 cm, 15 cm e 17 cm è rettangolo. V F

b. In un triangolo ABC, rettangolo in A, con altezza AK, $\overline{AK}^2 = \overline{BK} \cdot \overline{CK}$. V F

c. L'apotema di un esagono regolare di lato l misura $l\sqrt{3}$. V F

d. L'area di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r è $2r^2$. V F

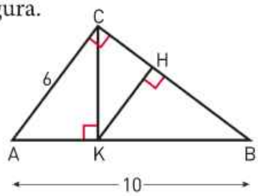
2 COMPLETA calcolando la lunghezza dei segmenti richiesti mediante i dati, espressi in centimetri, indicati nella figura.

a. $BC =$ ☐ cm

b. $AK =$ ☐ cm

c. $CK =$ ☐ cm

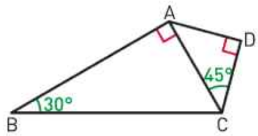
d. $CH =$ ☐ cm



3 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Dimostra che il rettangolo di lati congruenti alla base minore CD e alla proiezione del lato obliquo su AB è equivalente alla differenza dei quadrati costruiti su AC e sulla sua proiezione su AB.

4 Un parallelogramma ha un lato di 3 cm perpendicolare a una delle diagonali. Se l'altro lato è lungo 5 cm, qual è l'area del parallelogramma?

5 Calcola l'area del quadrilatero $ABCD$ in figura, sapendo che $AC = 2$ cm.

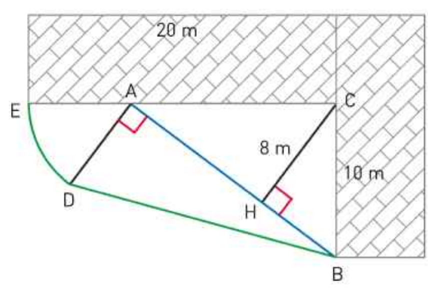


6 In un trapezio isoscele una base è il triplo dell'altra, l'altezza è lunga 12 cm e l'area è di 120 cm^2. Calcola il perimetro del trapezio.

PROVA D ▸ Competenze 2, 3 — IN UN'ORA

L'ufficio informazioni

L'azienda di promozione turistica di un paese decide di costruire un ufficio informazioni nel cortile esterno del municipio, che ha la forma di una «elle», di dimensioni 10 m e 20 m. L'ufficio avrà la forma di triangolo rettangolo (in figura ABC) e al suo interno è prevista una parte (CHB) non accessibile al pubblico.



a. Calcola le altre misure delle zone CHB e CHA.

All'esterno dell'ufficio turistico viene creata anche una zona verde; un'aiuola fiorita ha la forma di un settore circolare di centro A e raggio AE, e il punto D è tale che AD è perpendicolare ad AB.

b. Calcola l'area della zona ADB dove verrà seminato il prato.

c. Calcola la lunghezza del marciapiede DB.

d. Stabilisci se nella figura ci sono angoli tra loro congruenti, a parte gli angoli retti.