

Radicali

definizione di radice aritmetica

si definisce *radice aritmetica* n-sima di a , e si indica con $\sqrt[n]{a}$, quel numero b tale che: $b^n = a$

con a e b numeri reali ≥ 0 e con n numero intero > 0 in simboli: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

nomenclatura

$\sqrt[n]{a^m}$ si chiama radicale
 n è l'indice della radice

$$\sqrt[n]{a^m}$$

m è l'esponente del radicando
 a^m è il radicando

proprietà

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt[1]{a} = a$$

$\sqrt[0]{a}$ non ha significato

esempi

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt[3]{0} = 0$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

operazioni con i radicali

operazione	nome	esempio
$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$	semplificazione	$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$
$\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ $\rightarrow \sqrt[mn]{a^n} \text{ e } \sqrt[mn]{b^m}$	riduzione allo stesso indice	$\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[12]{5^3}$ e $\sqrt[12]{2^4}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$	prodotto di radicali	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{5^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{200}$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	rapporto di radicali	$\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$
$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	trasporto di fattore dentro il segno di radice	$2 \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$
$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a^{m+n}} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^n} = a \sqrt[n]{a^m}$	trasporto di fattore fuori il segno di radice	$\sqrt[3]{5^5} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2} = 5 \sqrt[3]{5^2}$ $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2 \sqrt{5}$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	potenza di radicali	$(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	radice di radice	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
$\alpha \sqrt[n]{a} \pm \beta \sqrt[n]{a} = (\alpha \pm \beta) \sqrt[n]{a}$	somma algebrica di radicali simili	$8 \sqrt[3]{2} - 5 \sqrt[3]{2} = 3 \sqrt[3]{2}$

Radicali

razionalizzazione del denominatore di una frazione

- *che cosa è:* se al denominatore di una frazione compaiono uno o più radicali allora esso è un numero irrazionale. La razionalizzazione è una operazione che consente di eliminare i radicali al denominatore rendendolo così un numero razionale.
- *come si fa:* per razionalizzare il denominatore di una frazione bisogna moltiplicare il numeratore ed il denominatore della frazione per uno stesso fattore detto "fattore razionalizzante". Tale fattore va scelto in modo opportuno a seconda di come è formato il denominatore.

Si distinguono quattro casi riportati di seguito, in essi il fattore razionalizzante è evidenziato in **colore**.

1° caso: al denominatore una sola radice quadrata

cosa fare	esempi
$\frac{x}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}$	$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\frac{a}{5\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{5b}$
osserva che: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$ e che: $3\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = 3a$	

2° caso: al denominatore una sola radice **non** quadrata

cosa fare	esempi
$\frac{x}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$	$\frac{2}{\sqrt[3]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{2\sqrt[3]{7}}{7}$ $\frac{2}{\sqrt[5]{ab^2c^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{a^4b^3c^2}}{\sqrt[5]{a^4b^3c^2}} = \frac{2\sqrt[5]{a^4b^3c^2}}{abc}$
osserva che: $\sqrt[2]{a^2} \cdot \sqrt[2]{a^5} = \sqrt[2]{a^7} = a$ e che: $\sqrt[5]{ab^2c^3} \cdot \sqrt[5]{a^4b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5b^5c^5} = abc$	

3° caso: al denominatore un polinomio con una o più radici quadrate

cosa fare	esempi
$\frac{x}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{x(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$	$\frac{2}{5 - \sqrt{3}} \cdot \frac{5 + \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}} = \frac{2(5 + \sqrt{3})}{25 - 3} = \frac{2(5 + \sqrt{3})}{22} = \frac{5 + \sqrt{3}}{11}$
$\frac{x}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{x(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$	$\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$
osserva che il prodotto notevole $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ si può applicare anche ai seguenti casi	
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$	$(\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b) = a - b^2$ $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

4° caso: al denominatore un binomio con una o due radici cubiche

cosa fare	$\frac{x}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{x(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a + b}$
esempio	$\frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}} = \frac{2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})}{2 + 5} = \frac{2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})}{7}$
ricorda i prodotti notevoli: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	

Radicali

radicale doppio

- che cosa è:* un radicale doppio è formato da una radice quadrata il cui radicando è formato dalla somma di un monomio e di un'altra radice quadrata, cioè: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$
- come si risolve:* se $(a^2 - b)$ è un quadrato perfetto, si applica la formula del radicale doppio che consente di trasformare il radicale doppio nella somma di due radici singole.

ricorda: un quadrato perfetto è un numero la cui radice quadrata è un numero naturale, ad esempio 4, 9, 16, 25 sono quadrati perfetti

formula	$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$	la formula si applica solo se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto
esempio	$\sqrt{6 - \sqrt{20}} \quad a = 6 \quad b = 20 \rightarrow a^2 - b = 36 - 20 = 16$ $\sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{16}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{16}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 4}{2}} - \sqrt{\frac{6 - 4}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{1} = \sqrt{5} - 1$	16 è un quadrato perfetto e la formula si può applicare

definizione di radice algebrica

si definisce *radice algebrica* n-sima di a , e si indica con $\sqrt[n]{a}$, quel numero b tale che: $b^n = a$ con a e b numeri **reali qualsiasi** e con n numero intero > 0 in simboli: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

l'esigenza di ampliare la definizione di radice aritmetica a quella di *radice algebrica* nasce dalla necessità di risolvere equazioni di secondo grado o di grado superiore al secondo del tipo $x^n = a$

esempi

caso n pari	caso n dispari
$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$	$x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1$
$x^2 = -1 \rightarrow x = \pm \sqrt{-1} \rightarrow$ non ha soluzioni in \mathbb{R}	$x^3 = -1 \rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \rightarrow x = -1$
$x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{0} \rightarrow x = 0$	$x^3 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{0} \rightarrow x = 0$
$x^2 = 5 \rightarrow x = \pm \sqrt{5}$	$x^3 = 5 \rightarrow x = \sqrt[3]{5}$
$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$	$x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} \rightarrow x = 2$
$x^2 = -9 \rightarrow x = \pm \sqrt{-9} \rightarrow$ non ha soluzioni in \mathbb{R}	$x^3 = -8 \rightarrow x = \sqrt[3]{-8} \rightarrow x = -2$

osservazioni importanti

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{(a)^2} = a $	$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$		
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$	$\sqrt[3]{a^3} = a$	$\sqrt[3]{(-a)^3} = -a$	$(\sqrt[3]{a})^3 = a$	$(\sqrt[3]{-a})^3 = -a$